Devoir surveillé n$^{\text{o}}$ 4

Vendredi 9 janvier

Le sujet comporte 4 pages et est constitué de trois exercices indépendants.

Les calculatrices sont interdites.

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Rappel des consignes :

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Exercice 1. (*d'après E3A PSI 2025*)
Soient r un nombre réel non nul, n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et M_r la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$M_r = \begin{pmatrix} 1 & r & \cdots & r \\ r & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & r \\ r & \cdots & r & 1 \end{pmatrix}.$$

On note enfin J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont égaux à 1.

1. Exprimer J^2 en fonction de J.

2. En déduire, selon les valeurs de l'entier naturel ℓ, l'expression de J^ℓ.

3. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(J)$ et le rang de la matrice J.

4. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(J)$.

5. Déterminer les valeurs propres ainsi que les sous-espaces propres de la matrice J.

6. Justifier que la matrice J est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donner une matrice diagonale D semblable à J.

7. Justifier que $M_r \in \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_n,\, J)$.

8. Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminer explicitement deux réels α_k et β_k tels que $(M_r)^k = \alpha_k \mathrm{I}_n + \beta_k J$. On exprimera le résultat sans le symbole $\sum$.

9. Montrer que la matrice M_r est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer une matrice Δ_r diagonale semblable à M_r.

Exercice 2. Polynôme de Laguerre et méthode de quadrature de Gauss (*CCINP PC 2019*)
Dans tout l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie I - Produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$

I.1 - Généralités

Pour tout couple $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, on note :

$$(P \mid Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Q1. Justifier que l'intégrale définissant $(P \mid Q)$ est convergente.

Q2. Montrer que l'application $(\cdot \mid \cdot) : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$ est un produit scalaire.

I.2 - Calcul d'un produit scalaire

Q3. Soit $k \in [\![1\,;n]\!]$. À l'aide d'une intégration par parties, établir que :

$$\int_0^{+\infty} t^k\,\mathrm{e}^{-t}\,dxt = k\int_0^{+\infty} t^{k-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,dxt.$$

Q4. Conclure que $(X^k \mid 1) = k!$ pour tout entier $k \in [\![0\,;n]\!]$.

Partie II - Construction d'une base orthogonale

On considère l'application α définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \alpha(P) = XP'' + (1-X)P'.$$

II.1 - Propriétés de l'application α

Q5. Montrer que α est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Q6. Écrire la matrice de α dans la base $(1, X, \dots, X^n)$.

Q7. En déduire que α est diagonalisable et que $\mathrm{Sp}(\alpha) = \{-k \mid k \in [\![0\,;n]\!]\}$.

II.2 - Vecteurs propres de l'application α

On fixe un entier $k \in [\![0\,;n]\!]$.

Q8. Quelle est la dimension de $\mathrm{Ker}\big(\alpha + k\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}\big)$?

Q9. En déduire qu'il existe un unique polynôme $P_k \in \mathbb{R}_n[X]$, de coefficient dominant égal à 1, vérifiant $\alpha(P_k) = -kP_k$.

Q10. Justifier que P_k est de degré k.

Q11. Déterminer P_0 et P_1. Vérifier que $P_2 = X^2 - 4X + 2$.

II.3 - Orthogonalité de la famille $(P_0, \dots, P_n)$

On fixe un couple $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$.

Q12. Montrer que $(\alpha(P) \mid Q) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Q13. En déduire que $(\alpha(P) \mid Q) = (P \mid \alpha(Q))$.

Q14. Montrer que $(P_0, \dots, P_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$. On pourra utiliser **Q9** et **Q13**.

Partie III - Méthode de quadrature de Gauss

On admet que le polynôme P_n admet n racines réelles **distinctes** que l'on note $x_1, \ldots, x_n$.
On souhaite montrer qu'il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad \int_0^{+\infty} P(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(x_i). \qquad (*)$$

Q15. Montrer qu'un n-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifie $(*)$ si et seulement si :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0! \\ 1! \\ \vdots \\ (n-1)! \end{pmatrix}.$$

Q16. En déduire qu'il existe un unique n-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $(*)$

Q17. Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}_{2n}[X]$ tel que :

$$\int_0^{+\infty} P(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \neq \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P(x_i).$$

Exercice 3. La fonction dilogarithme (*d'après CCINP PC 2023*)
Dans cet exercice, on commence par définir la fonction dilogarithme dans la première partie, puis on étudie quelques-unes de ses propriétés dans les parties suivantes.
On admet et on pourra utiliser librement l'égalité :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Partie I - Existence et premières propriétés de la fonction dilogarithme

Dans cette partie, on considère la fonction $f\colon]0\,;+\infty[\times]-\infty\,;1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (t,x) \in]0\,;+\infty[\times]-\infty\,;1], \quad f(t,x) = \frac{t}{\mathrm{e}^t - x}.$$

Q1. Justifier que la fonction f est bien définie sur $]0\,;+\infty[\times]-\infty, 1]$.

Q2. Montrer que la fonction $t \mapsto f(t,1)$ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$.

Q3. Soit $x \in]-\infty\,;1]$. En comparant les fonctions $t \mapsto f(t,x)$ et $t \mapsto f(t,1)$, montrer que $t \mapsto f(t,x)$ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$.

D'après les résultats précédents, on peut définir la fonction $L\colon]-\infty\,;1] \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in]-\infty\,;1], \quad L(x) = x \int_0^{+\infty} f(t,x)\,\mathrm{d}t.$$

Cette dernière est appelée fonction dilogarithme.

Q4. Montrer que la fonction L est continue sur $]-\infty\,;1]$.

Partie II - Développement en série

Dans cette partie, on montre que la fonction L peut s'écrire comme la somme d'une série. On considère un nombre réel $x \in [-1\,;1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $s_n \colon]0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ par

$$\forall t \in]0\,;+\infty[, \quad s_n(t) = t\,\mathrm{e}^{-(n+1)t}\,x^n.$$

Q5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} s_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} s_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{x^n}{(n+1)^2}$.

Q6. Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} s_n$ converge simplement sur $]0\,;+\infty[$ et que :

$$\forall t \in]0\,;+\infty[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} s_n(t) = f(t,x).$$

Q7. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n^2}$ converge et déduire des questions précédentes que $\displaystyle L(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

Q8. Montrer que pour tout $x \in [-1\,;1]$, on a $L(x) + L(-x) = \dfrac{1}{2}L(x^2)$.

Q9. Déduire des questions précédentes les valeurs de $L(1)$ et $L(-1)$.

Partie III - Une autre propriété

Dans cette partie, on considère la fonction $h \colon]0\,;1[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in]0\,;1[, \quad h(x) = L(x) + L(1-x) + \ln(x)\ln(1-x).$$

On rappelle qu'on a montré dans la partie précédente l'égalité $\displaystyle L(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$ valable pour tout $x \in [-1\,;1]$.

Q10. Justifier que la fonction L est dérivable sur $]-1,1[$.

Q11. On **admet** que pour tout $x \in]-1\,;1[$, $\displaystyle\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ (*ça sera un résultat de cours d'ici la fin du mois*).
Montrer que l'on a :

$$\forall x \in]-1\,;1[, \quad L'(x) = \begin{cases} -\dfrac{\ln(1-x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Q12. Montrer que la fonction h est constante sur $]0\,;1[$.

Q13. Montrer que $h(x) = L(1)$ pour tout $x \in]0\,;1[$. En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{2\,\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t$.